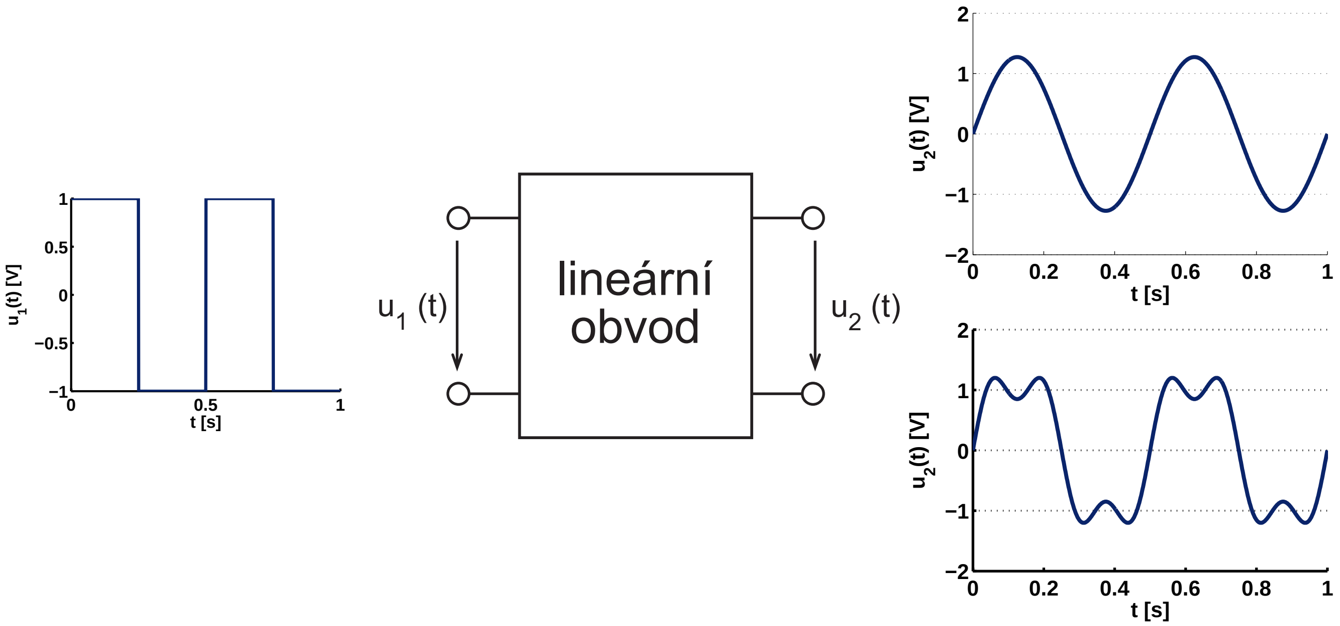
Fourierovy řady

Motivace:

- Nástroj pro analýzu elektrických obvodů, buzených obvodovými veličinami s periodickým, neharmonickým časovým průběhem
- Nástroj, kterým lze snadno vysvětlit frekvenční vlastnosti elektrických obvodů



<table>
<tr><th>časový průběh</th><th colspan="5">metoda analýzy</th></tr>
<tr><td>stejnosměrný</td><td>SUS</td><td rowspan="2">HUS</td><td rowspan="3">Fourierovy řady</td><td rowspan="4">Fourierova transformace</td><td rowspan="4">Laplaceova transformace</td></tr>
<tr><td>sinus</td><td></td></tr>
<tr><td>periodický</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>aperiodický</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

1. HUS přejde v SUS, pokud $\omega = 0$
2. Fourierovy řady: pro jedinou frekvenci ω přecházejí v HUS
3. Fourierova transformace: v ní přecházejí Fourierovy řady pro $T \to \infty$
4. Laplaceova transformace: univerzální nástroj pro analýzu obvodů buzených všemi uvedenými časovými průběhy, je zobecněním Fourierovy transformace

Harmonická syntéza

Sčítání harmonických průběhů

1. Sinusové průběhy se **stejnou** frekvencí?

Příklad:

$u_1(t) = 30\sin(\omega t),\ u_2(t) = 40\cos(\omega t),\ u(t) = u_1(t) + u_2(t) = ?$

A) Řešení pomocí fázorů

$$\hat{U}_1 = 30,\ \hat{U}_2 = 40e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 40j,\ \hat{U} = 30 + 40j = \sqrt{30^2 + 40^2}\,e^{j\cdot arctg\frac{40}{30}} = 50e^{j\cdot 0.927}$$

$$u(t) = 50\cdot\sin(\omega t + 0.927)$$

B) Řešení pomocí goniometrických funkcí

Platí:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\begin{aligned} A\cdot\sin(\omega t + \varphi) &= A\cdot\cos\omega t\cdot\sin\varphi + A\cdot\sin\omega t\cdot\cos\varphi = \\ &= \left| a = A\cdot\sin\varphi, \quad b = A\cdot\cos\varphi \right| = \\ &= a\cdot\cos\omega t + b\cdot\sin\omega t \end{aligned}$$

$$\sin\varphi = \frac{a}{A}, \quad \cos\varphi = \frac{b}{A}$$

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{b}{A}\right)^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad a^2 + b^2 = A^2 \quad\Rightarrow\quad A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

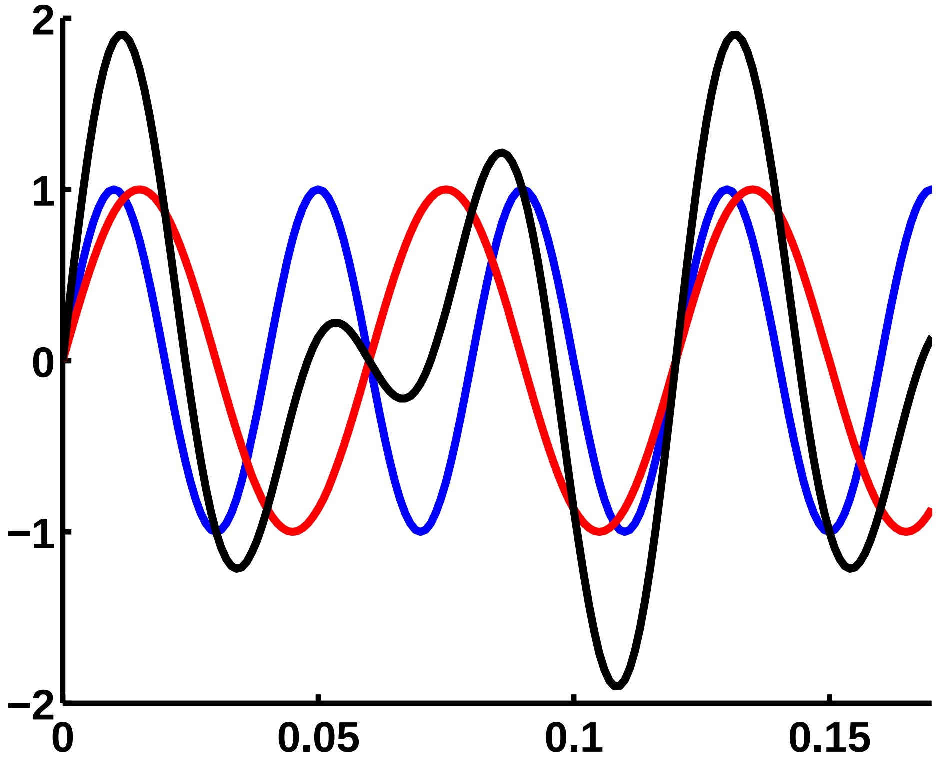
$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tg\varphi = \frac{a}{b} \quad\Rightarrow\quad \varphi = arctg\frac{a}{b}$$

$$A = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50, \quad \varphi = arctg\frac{40}{30} = 0.927$$

Součtem dvou sinusových průběhů o stejné frekvenci je opět sinusový průběh.

Sinusové průběhy s **různou** frekvencí

$T_1 = 0.04\ s^{-1}$, $T_2 = 0.06\ s^{-1}$



modrá	$T_1 = 0.04\ s^{-1}$
červená	$T_2 = 0.06\ s^{-1}$
černá	součet obou průběhů, $T = 0.12\ s^{-1}$

Součet obou průběhů je opět periodický, pro společnou periodu platí:

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k_1}{k_2}$, společná perioda $T = k_2 T_1 = k_1 T_2$

Případně, společná perioda je nejmenší společný násobek čitatele T_1 a T_2, pokud dáme T_1 a T_2 na společného jmenovatele.

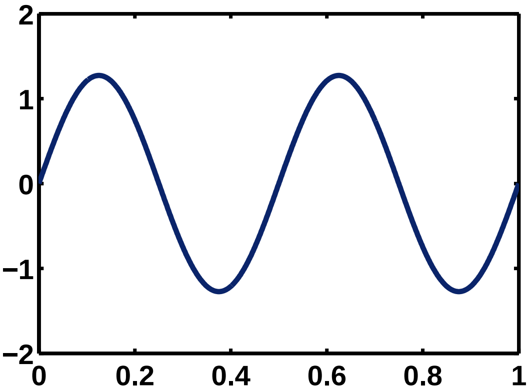
Specielně: $T_k = \frac{T}{k}, \quad k = 1,2,\ldots,n$

kde T – základní perioda

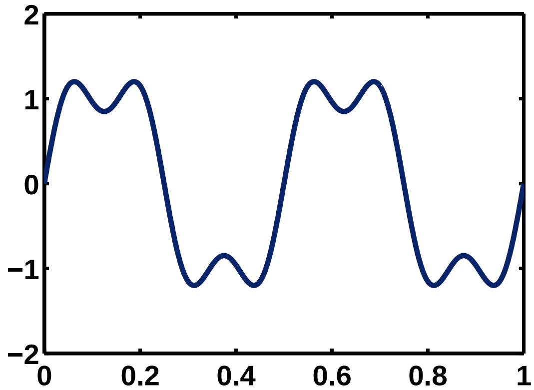
k – celé kladné číslo

Pak $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – základní (první) harmonická

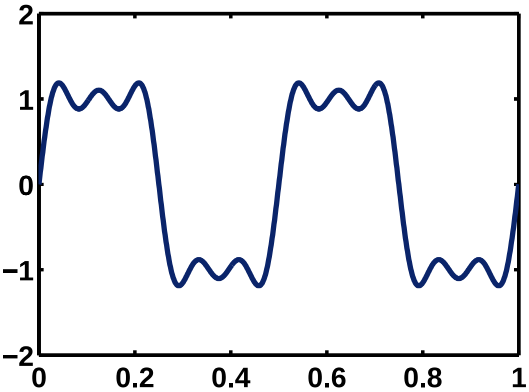
$k\omega_0$ – vyšší harmonické



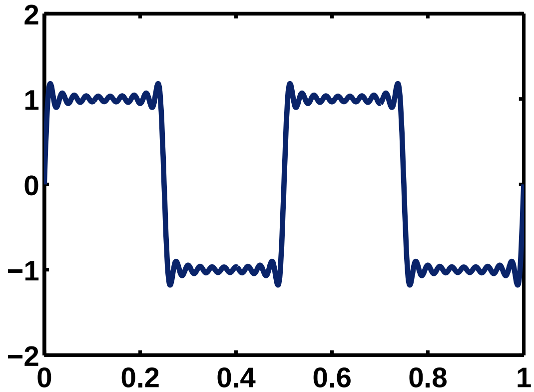
1 harmonická



1, 3 harmonická



1, 3, 5 harmonická



1, 3, …, 19 harmonická

Součet harmonických funkcí konverguje[1)] k neharmonické periodické funkci

1) při splnění podmínek a s výjimkami viz dále

$$f(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk} \sin(k\omega_0 t + \psi_k) = \qquad \text{spektrální tvar}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \qquad \text{trigonometrický tvar}$$

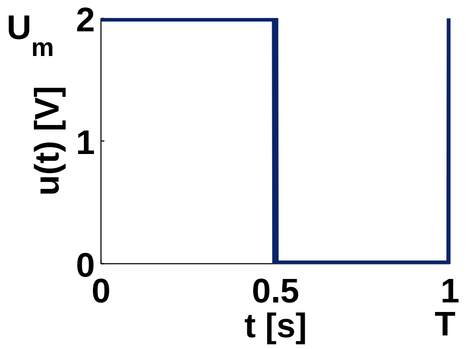
kde

$$\frac{a_0}{2} = B_0 = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_k+T} f(t) dt \qquad \text{matematická střední hodnota}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_k}^{t_k+T} f(t) \cdot \cos k\omega_0 t \, dt \qquad B_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_k}^{t_k+T} f(t) \cdot \sin k\omega_0 t \, dt \qquad \psi_k = \frac{a_k}{b_k}$$

Příklad:



$$f(t) = U_m \qquad t \in \left\langle 0, \frac{T}{2} \right)$$

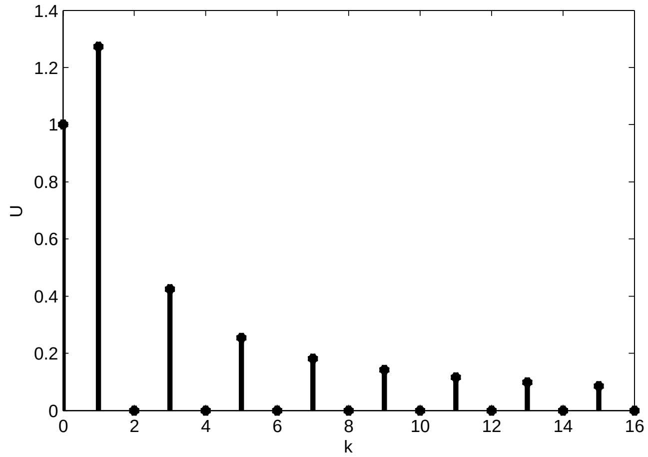
$$= 0 \qquad t \in \left\langle \frac{T}{2}, T \right)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 2 \cdot dt = \frac{1}{T}\left[2t\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{T}\left(2 \cdot \frac{T}{2} - 0\right) = 1$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 2 \cdot \cos k\omega_0 t \; dt = \frac{4}{T}\left[\frac{\sin k\omega_0 t}{k\omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{4}{T} \cdot \frac{1}{k\frac{2\pi}{T}}\left(\sin k\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} - \sin 0\right) = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 2 \cdot \sin k\omega_0 t \; dt = \frac{4}{T}\left[\frac{-\cos k\omega_0 t}{k\omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{4}{T} \cdot \frac{1}{k\frac{2\pi}{T}}\left(-\cos k\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} + \cos 0\right) = \frac{4}{k\pi}$$

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \sin k\omega_0 t$$



Čárové spektrum

Vybrané vlastnosti Fourierových řad:

Sudá funkce	$a_k = 0$
Lichá funkce	$b_k = 0$
Antiperiodická funkce	Pouze liché členy

Podmínky existence Fourierovy řady

Dirichletovy podmínky:

1. funkce $f(t)$ je v průběhu jedné periody omezená
2. funkce má konečně mnoho extrémů a bodů nespojitosti 1. druhu

Fázorová reprezentace

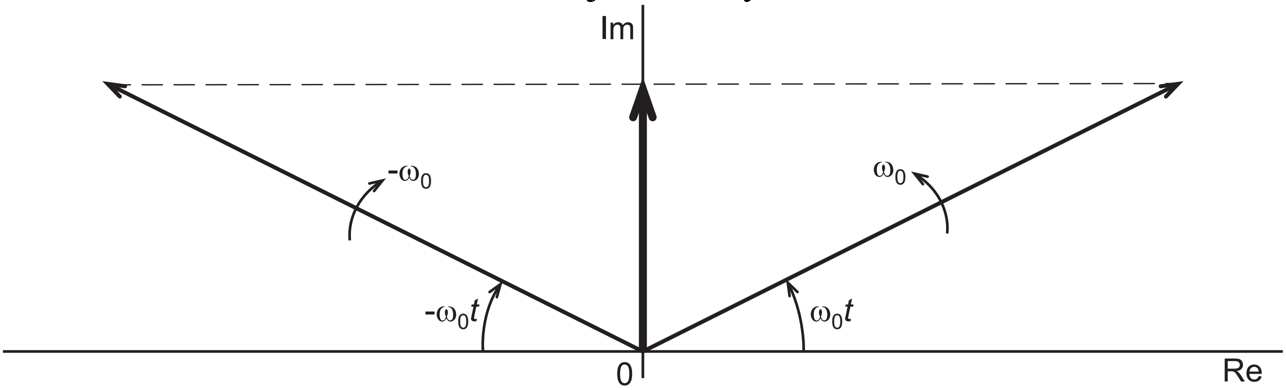
$$B_{mk} \sin\left(k\omega_0 t + \psi_k\right) = \operatorname{Im}\left[B_{mk} e^{j\psi_k} e^{jk\omega_0 t}\right] = \operatorname{Im}\left[\mathbf{B}_{mk} e^{jk\omega_0 t}\right]$$

$$\mathbf{B}_{mk} = B_{mk} e^{j\psi_k} = B_{mk}\left(\cos\psi_k + j\sin\psi_k\right) = b_k + ja_k$$

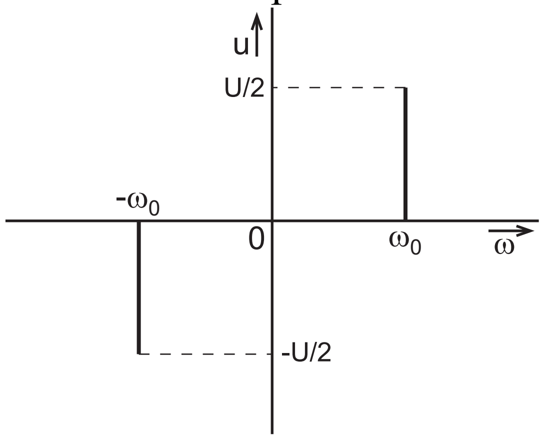
$$f(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}\left[\mathbf{B}_{mk} e^{jk\omega_0 t}\right]$$

Funkce sin, vyjádřená pomocí dvou proti sobě rotujících fázorů

rotující fázory



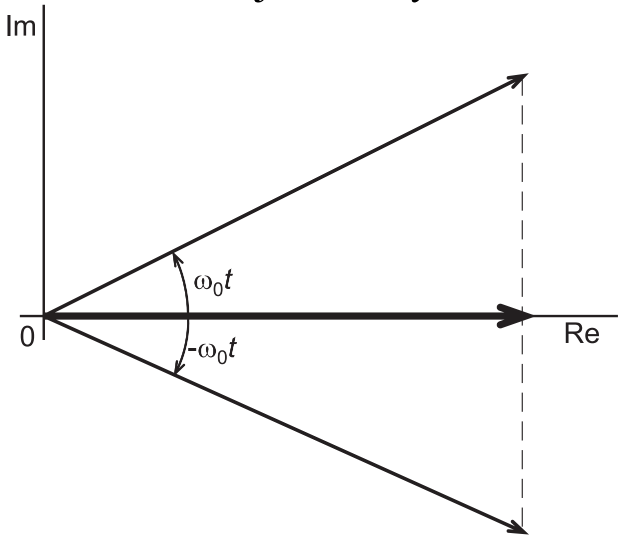
čárové spektrum



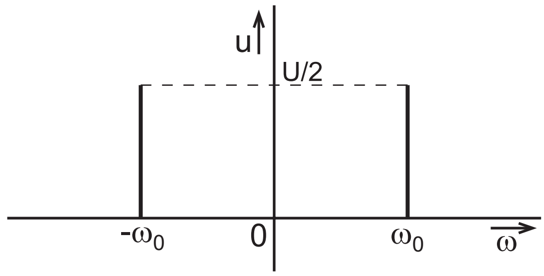
$$u(t) = \frac{U}{2}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{U}{2}\left[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t) - \cos(-\omega_0 t) - j\sin(-\omega_0 t)\right] =$$
$$= jU\sin\omega_0 t$$

Funkce cos, vyjádřená pomocí dvou proti sobě rotujících fázorů

rotující fázory



čárové spektrum



$$u(t) = \frac{U}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{U}{2}\left[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t) + \cos(-\omega_0 t) + j\sin(-\omega_0 t)\right] =$$

$$= U\cos\omega_0 t$$

S využitím proti sobě rotujících fázorů:

$$B_{mk}\sin(k\omega_0 t + \psi_k) = \frac{1}{j}\left(\frac{\mathbf{B}_{mk}}{2}e^{jk\omega_0 t} - \frac{\mathbf{B}^*{}_{mk}}{2}e^{-jk\omega_0 t}\right) =$$

$$= \frac{1}{j}\left(\frac{b_k + ja_k}{2}e^{jk\omega_0 t} - \frac{b_k - ja_k}{2}e^{-jk\omega_0 t}\right) =$$

$$= \left(\frac{a_k - jb_k}{2}e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k + jb_k}{2}e^{-jk\omega_0 t}\right) =$$

$$= \mathbf{A}_k e^{jk\omega_0 t} + \mathbf{A}^*{}_k e^{-jk\omega_0 t} = \left|\mathbf{A}^*{}_k = \mathbf{A}_{-k}\right| =$$

$$= \mathbf{A}_k e^{jk\omega_0 t} + \mathbf{A}_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$$

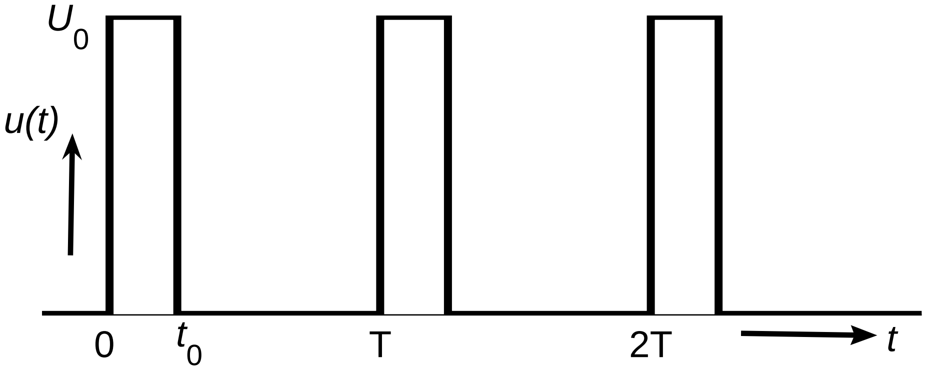
Komplexní tvar Fourierovy řady:

$$\boxed{f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}_k e^{jk\omega_0 t}}$$

Koeficienty:

$$\boxed{\mathbf{A}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}$$

Příklad:



$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{t_0} U_0 \cos k\omega_0 t \; dt = \frac{2U_0}{T}\left[\frac{\sin k\omega_0 t}{k\omega_0}\right]_0^{t_0} = \frac{U_0}{\pi}\frac{\sin k\omega_0 t_0}{k}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{t_0} U_0 \sin k\omega_0 t \; dt = \frac{2U_0}{T}\left[\frac{-\cos k\omega_0 t}{k\omega_0}\right]_0^{t_0} = \frac{U_0}{\pi}\frac{1-\cos k\omega_0 t_0}{k}$$

Amplitudové spektrum

$$U_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{\left(\frac{U_0}{\pi}\frac{\sin k\omega_0 t_0}{k}\right)^2 + \left(\frac{U_0}{\pi}\frac{1-\cos k\omega_0 t_0}{k}\right)^2} =$$

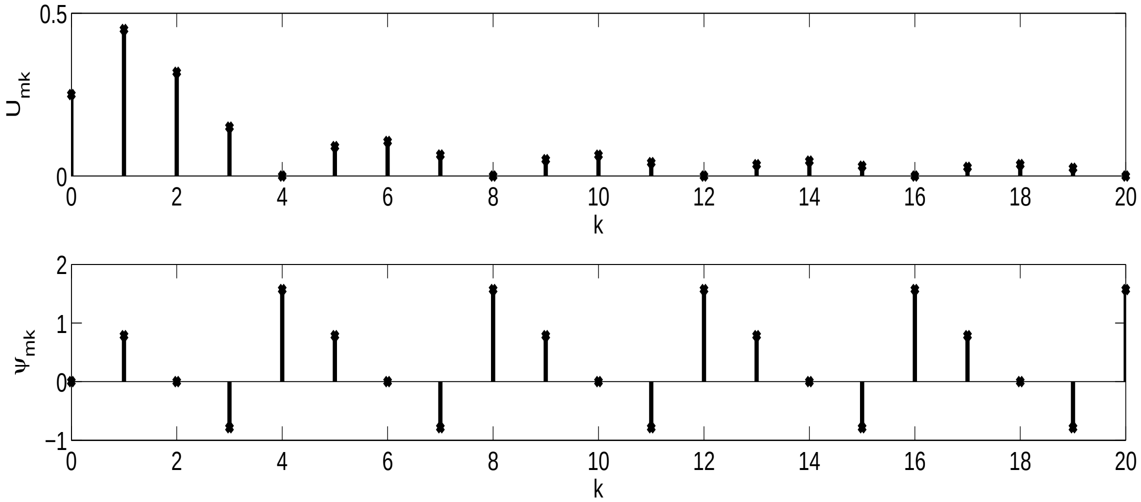
$$= \frac{U_0}{k\pi}\sqrt{\sin^2(k\omega_0 t_0) + 1 - 2\cos(k\omega_0 t_0) + \cos^2(k\omega_0 t_0)} =$$

$$= \frac{U_0}{k\pi}\sqrt{2(1-\cos k\omega_0 t_0)}$$

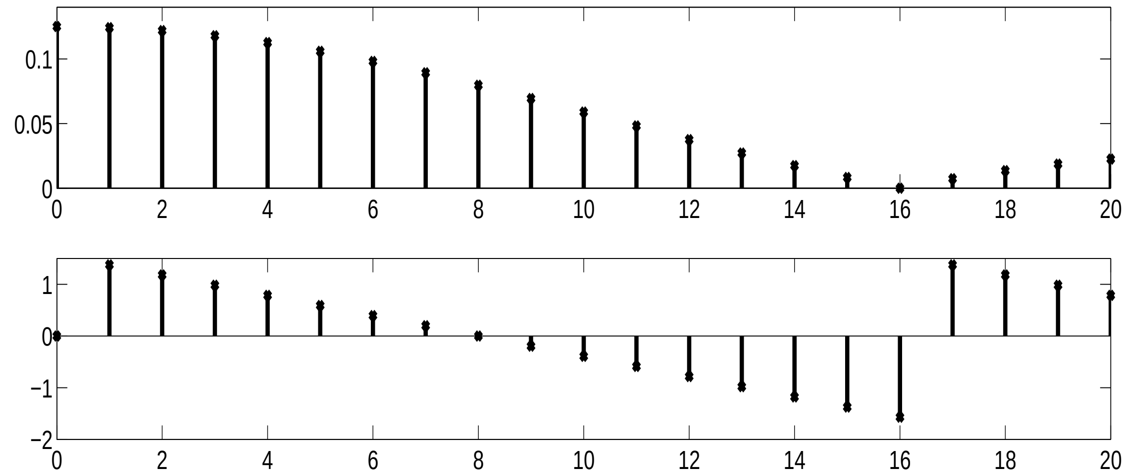
Fázové spektrum

$$\psi_k = arctg\frac{a_k}{b_k} = arctg\frac{\sin k\omega_0 t_0}{1-\cos k\omega_0 t_0}$$

Amplitudové a fázové spektrum pro $t = \frac{T}{4}$



Amplitudové a fázové spektrum pro $t = \frac{T}{16}$



Amplitudové a fázové spektrum pro $t = \frac{T}{64}$