Ortogonalita

Ortogonální znamená kolmý. Ortogonalita je široký pojem, používá se v různých oborech, nás bude zajímat matematika. V matematice zřejmě nejsnáze představitelný příklad je kolmost dvou vektorů (jejich vektorový součin je roven 0), ale používá se rovněž pro vyjádření určitých vlastností funkcí.

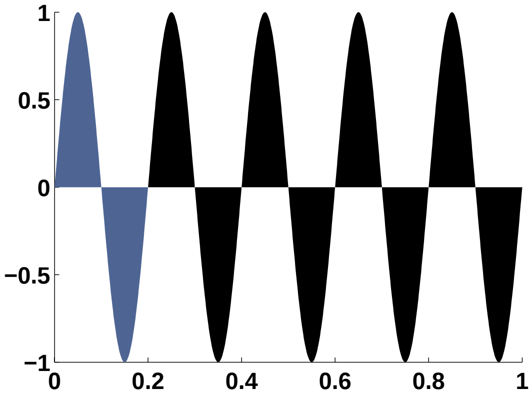
Dvě funkce jsou ortogonální, pokud je splněna podmínka

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x) g(x) w(x)\, dx = 0 .$$

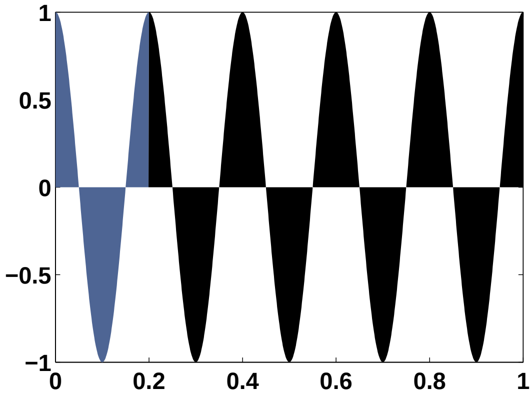
V teorii obvodů nás bude ortogonalita zajímat především v souvislosti s Fourierovými řadami. Váhová funkce $w(x)$ bude v tomto případě rovna 1. Bude se jednat o funkce sin a cos, jako funkce času. Obecná proměnná x bude proto nahrazena časem t.

1) Násobení konstantou

Na obrázcích jsou zobrazeny funkce sin a cos, základní perioda je zobrazena modře. Je vidět, že plocha nad osou a pod osou je stejná. Násobení konstantou změní pouze amplitudu funkce.



$\sin \omega t$



$\cos \omega t$

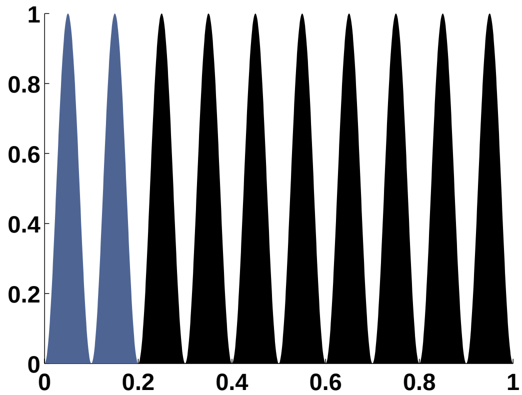
To, co je intuitivně zřejmé z obou obrázků, lze dokázat matematicky:

$$\int_0^T \frac{a_0}{2} \cdot \sin k \frac{2\pi}{T} t\, dt = \frac{a_0}{2} \left[\frac{-\cos k \frac{2\pi}{T} t}{k \frac{2\pi}{T}} \right]_0^T = \frac{a_0}{2} \frac{T}{2k\pi} \left(-\cos \frac{2k\pi T}{T} + \cos 0 \right) = 0$$

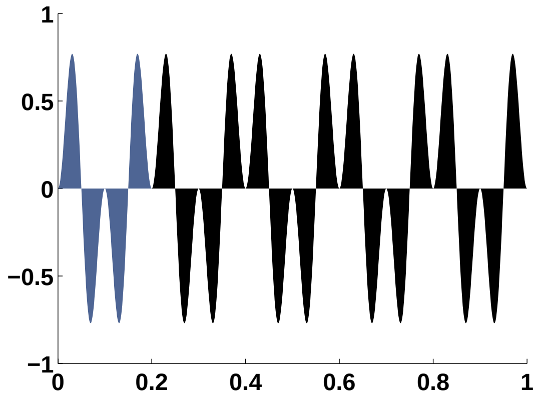
$$\int_0^T \frac{a_0}{2} \cdot \cos k \frac{2\pi}{T} t\, dt = \frac{a_0}{2} \left[\frac{\sin k \frac{2\pi}{T} t}{k \frac{2\pi}{T}} \right]_0^T = \frac{a_0}{2} \frac{T}{2k\pi} \left(\sin \frac{2k\pi T}{T} - \sin 0 \right) = 0$$

2) Funkce sin

Na následujících obrázcích jsou funkce $\sin^2 \omega t$ a $\sin \omega t \cdot \sin 2\omega t$, základní perioda je zvýrazněna modře. Z obrázků je vidět, že zatímco pro stejnou frekvenci (tedy $\sin^2 \omega t$) je funkce pouze kladná, pro nestejné frekvence je opět plocha funkce nad a pod osou v průběhu jedné periody stejná.



$\sin^2 \omega t$



$\sin \omega t \cdot \sin 2\omega t$

Tento intuitivní závěr lze dokázat matematicky:

Platí:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2\alpha\right].$$

Potom

$$\int_0^T \sin k\frac{2\pi}{T}t \cdot \sin l\frac{2\pi}{T}t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \left[\cos\frac{2\pi}{T}t(k-l) - \cos\frac{2\pi}{T}t(k+l)\right] dt =$$

$$= \left|pokud\ k = l\right| = \int_0^T \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2k\frac{2\pi}{T}t\right] dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin 2k\frac{2\pi}{T}t}{2k\frac{2\pi}{T}}\right]_0^T =$$

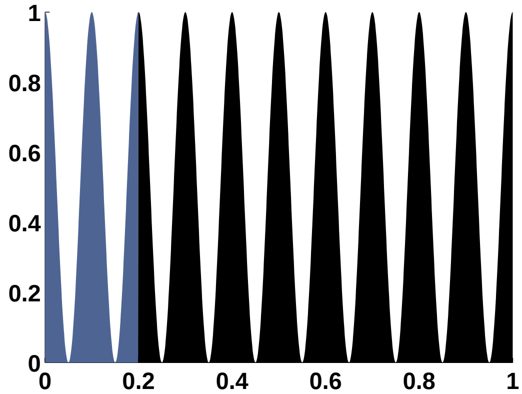
$$= \frac{1}{2}\left(T - 0 - \frac{\sin 4k\pi - \sin 0}{\frac{4k\pi}{T}}\right) = \frac{T}{2}$$

$$= \left|pokud\ k \neq l\right| = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{2\pi}{T}t(k-l)}{\frac{2\pi}{T}(k-l)} - \frac{\sin\frac{2\pi}{T}t(k+l)}{\frac{2\pi}{T}(k+l)}\right]_0^T =$$

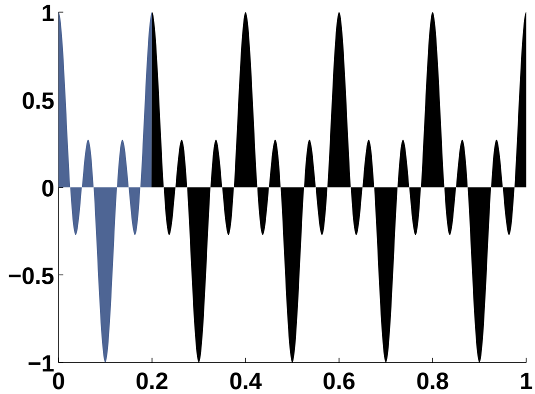
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\pi(k-l) - \sin 0}{\frac{2\pi(k-l)}{T}} - \frac{\sin 2\pi(k+l) - \sin 0}{\frac{2\pi(k+l)}{T}}\right) = 0$$

3) Funkce cos

Podobně, jako u funkce sin i u funkce cos má druhá mocnina (tj. stejné frekvence) plochu pouze nad osou, při nestejných frekvencích jsou plochy nad a pod osou stejné, jak je zřejmé z obrázků, a součet ploch přes periodu je tak nulový:



$\cos^2 \omega t$



$\cos \omega t \cdot \cos 2\omega t$

Tento intuitivní závěr lze dokázat matematicky:

Platí

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2\alpha\right]$$

Potom

$$\int_0^T \cos k\frac{2\pi}{T}t \cdot \cos l\frac{2\pi}{T}t \; dt = \frac{1}{2}\int_0^T \left[\cos\frac{2\pi}{T}t\,(k-l) + \cos\frac{2\pi}{T}t\,(k+l)\right] dt =$$

$$= \left|pokud\ k = l\right| = \int_0^T \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2k\frac{2\pi}{T}t\right] dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2k\frac{2\pi}{T}t}{2k\frac{2\pi}{T}}\right]_0^T =$$

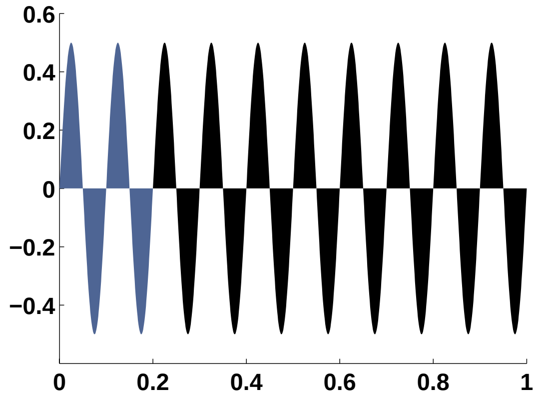
$$= \frac{1}{2}\left(T - 0 + \frac{\sin 4k\pi - \sin 0}{\frac{4k\pi}{T}}\right) = \frac{T}{2}$$

$$= \left|pokud\ k \neq l\right| = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{2\pi}{T}t\,(k-l)}{\frac{2\pi}{T}(k-l)} + \frac{\sin\frac{2\pi}{T}t\,(k+l)}{\frac{2\pi}{T}(k+l)}\right]_0^T =$$

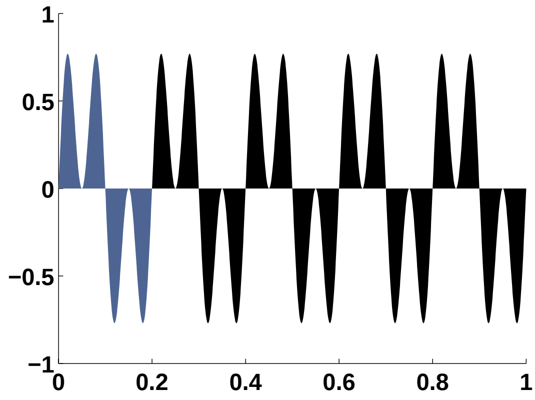
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\pi(k-l) - \sin 0}{\frac{2\pi(k-l)}{T}} + \frac{\sin 2\pi(k+l) - \sin 0}{\frac{2\pi(k+l)}{T}}\right) = 0$$

4) Funkce sin a cos

V případě stejných i různých frekvencí je součet ploch nad a pod osou přes periodu nulový.



$\sin\omega t\cdot\cos\omega t\,,\ T_1=T_2=0.2\ s$



$\sin 2\omega t\cdot\cos\omega t\,,\ T=0.2s$

Platí:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

Potom

$$\int_0^T \sin k\frac{2\pi}{T}t\cdot\cos l\frac{2\pi}{T}t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^T\left[\sin\frac{2\pi}{T}t(k+l)+\sin\frac{2\pi}{T}t(k-l)\right]dt=$$

$$=\left|pokud\ k=l\right|=\int_0^T\frac{1}{2}\left[\sin 2k\frac{2\pi}{T}t+\sin 0\right]dt=\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 2k\frac{2\pi}{T}t}{2k\frac{2\pi}{T}}\right]_0^T=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 4k\pi+\cos 0}{\frac{4k\pi}{T}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1+1}{\frac{4k\pi}{T}}\right)=0$$

$$=\left|pokud\ k\neq l\right|=\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos\frac{2\pi}{T}t(k+l)}{\frac{2\pi}{T}(k+l)}-\frac{\cos\frac{2\pi}{T}t(k-l)}{\frac{2\pi}{T}(k-l)}\right]_0^T=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 2\pi(k+l)+\cos 0}{\frac{2\pi(k+l)}{T}}+\frac{-\cos 2\pi(k-l)+\cos 0}{\frac{2\pi(k-l)}{T}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-1+1}{\frac{2\pi(k+l)}{T}}+\frac{-1+1}{\frac{2\pi(k-l)}{T}}\right)=0$$

5) Komplexní exponenciela (fázor)

Ortogonálním systémem, se kterým se setkáváme u Fourierových řad ve fázorové reprezentaci je součin fázoru a fázoru komplexně sdruženého.

$$\int_0^T e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t}\, dt = \int_0^T e^{j(k-l)\omega_0 t}\, dt = \left[\frac{e^{j(k-l)\omega_0 t}}{j(k-l)\omega_0}\right]_0^T =$$

$$= \left[\frac{\cos(k-l)\omega_0 t + j\sin(k-l)\omega_0 t}{j(k-l)\omega_0}\right]_0^T =$$

$$= \frac{-j\cos(k-l)\frac{2\pi}{T}T + j\cos 0 + \sin(k-l)\frac{2\pi}{T}T - \sin 0}{(k-l)\frac{2\pi}{T}} =$$

$$= T\left[\frac{\sin(k-l)2\pi}{(k-l)2\pi} + j\frac{1-\cos(k-l)2\pi}{(k-l)2\pi}\right] =$$

$$= \left|k = l, \quad x = (k-l)2\pi\right| = \lim_{x\to 0} T\left[\frac{\sin x}{x} + j\frac{1-\cos x}{x}\right] = T$$

$$= \left|k \neq l\right| = 0$$

Vzorce pro výpočet koeficientů Fourierovy řady jsou založeny právě na ortogonálních vlastnostech funkcí sin a cos.

Koeficienty Fourierovy řady

1. Stejnosměrná složka

$$\int_0^T f(t)\, dt = \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t\right)\right] dt$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^T dt + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left(a_k\int_0^T \cos k\omega_0 t\; dt + b_k\int_0^T \sin k\omega_0 t\; dt\right)}_{=0} = \frac{a_0}{2}T$$

Odtud

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = \int_0^T f(t)\, dt}$$

2. Kosinové členy

$$\int_0^T f(t)\cos l\omega_0 t\ dt = \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t\right)\right]\cos l\omega_0 t\ dt$$

$$= \underbrace{\frac{a_0}{2}\int_0^T \cos l\omega_0 t\ dt}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_0^T \cos k\omega_0 t\ \cos l\omega_0 t\ dt + \underbrace{b_k \int_0^T \sin k\omega_0 t\ \cos l\omega_0 t\ dt}_{=0} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^T \frac{1}{2}\left[\cos(k-l)\omega_0 t + \cos(k+l)\omega_0 t\right] dt =$$

$$= \left|k = l\right| = a_k \int_0^T \frac{1}{2}\left[\cos 0 + \cos 2k\omega_0 t\right] dt = a_k \frac{T}{2}$$

$$= \left|k \neq l\right| = 0$$

Odtud

$$\boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_0 t\ dt}$$

3. Sinové členy

$$\int_0^T f(t)\sin l\omega_0 t\ dt = \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t\right)\right]\sin l\omega_0 t\ dt =$$

$$= \underbrace{\frac{a_0}{2}\int_0^T \sin l\omega_0 t\ dt}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\underbrace{a_k \int_0^T \cos k\omega_0 t\ \sin l\omega_0 t\ dt}_{=0} + b_k \int_0^T \sin k\omega_0 t\ \sin l\omega_0 t\ dt \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^T \frac{1}{2}\left[\cos(k-l)\omega_0 t - \cos(k+l)\omega_0 t\right] dt =$$

$$= \left|k = l\right| = b_k \int_0^T \frac{1}{2}\left[\cos 0 - \cos 2k\omega_0 t\right] dt = b_k \frac{T}{2}$$

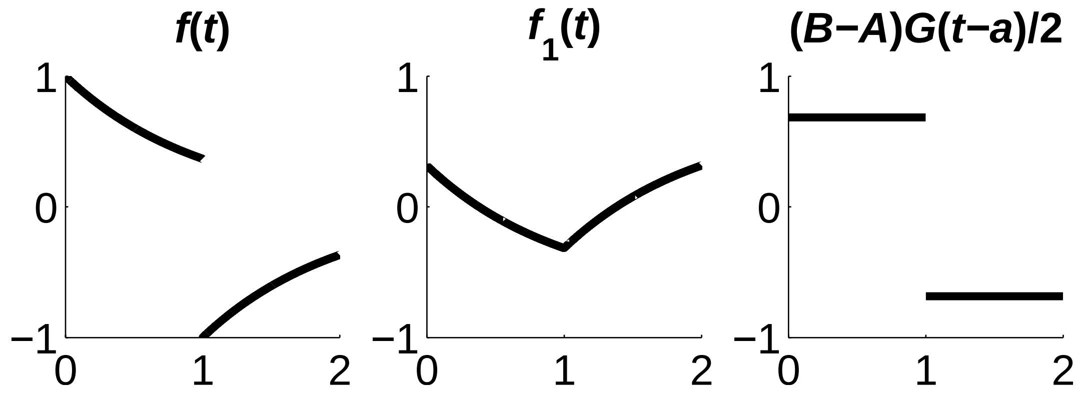
$$= \left|k \neq l\right| = 0$$

Odtud

$$\boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega_0 t\ dt}$$

Gibbsův jev

V této kapitole se budeme zabývat matematickým popisem jedné z vlastností Fourierových řad – Gibbsovu jevu.
Uvažujme funkci $f(t)$ s jedním bodem nespojitosti prvního druhu.



V okolí bodu nespojitosti bude

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(a-\varepsilon) = A$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(a+\varepsilon) = B$$

Pak můžeme nespojitou funkci $f(t)$ přepsat do tvaru

$$f(t) = \frac{B-A}{2} G(t-a) + f_1(t)$$

Funkce $f_1(t)$ je již spojitou funkcí. Nespojitost je popsána obdélníkem $G(t-a)$ s amplitudou ±1. Dále tedy postačí vyšetřit právě tento obdélník. Obdélník $G(t)$ můžeme aproximovat Fourierovou řadou

$$G(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$$

Pro prvních n členů můžeme Fourierovu řadu nahradit integrálem

$$\frac{\pi}{4} G(t) = \int_0^t \left[\cos\tau + \cos 3\tau + \ldots + \cos(2n-1)\tau\right] d\tau$$

Součtem kosinové řady je

$$\cos\tau + \cos 3\tau + \ldots + \cos(2n-1)\tau = \frac{\cos n\tau \sin n\tau}{\sin\tau} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2n\tau}{\sin\tau}.$$

Tedy

$$\frac{\pi}{4} G(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\sin 2n\tau}{\sin\tau}\, d\tau.$$

Pro lokální extrémy bude

$$G'(t) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2}\frac{\sin 2nt}{\sin t} = 0.$$

Namísto řeckého τ je opět použit symbol t, protože řecké písmeno pouze rozlišuje integrační mez a integrační proměnnou.
Derivace funkce $G(t)$ bude nulová pro

$$t_k = \frac{k\pi}{2n} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Substitucí

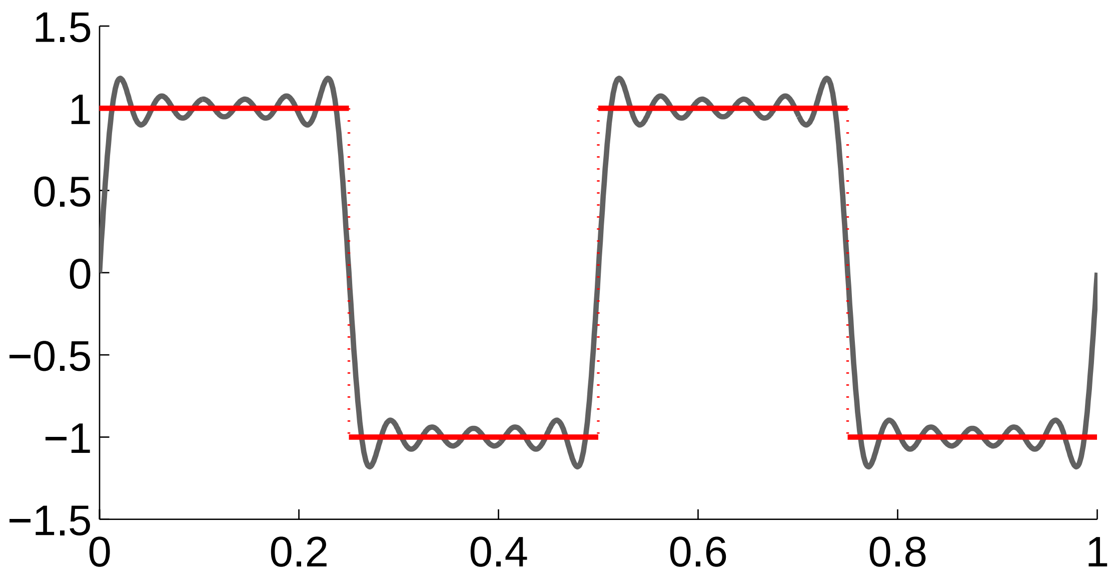
$$2n\tau = y,\quad \tau = \frac{y}{2n},\quad d\tau = \frac{1}{2n}dy$$

dostaneme pro první maximum $t = \dfrac{\pi}{2n}$

$$G\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2n\tau}{\sin\tau}\,d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{2n\sin\frac{y}{2n}}\,dy\,.$$

Pro velké n a malé t lze použít přibližný vzorec $\sin\dfrac{y}{2n} \approx \dfrac{y}{2n}$, takže

$$G\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{2}{\pi}Si\pi = 1.17897974\ldots$$



To znamená, že Fourierova řada překmitne funkci $G(t) = \mathrm{sgn}(t)$ o přibližně 17.9 %, což znamená, že funkci $f(t)$ překmitne o přibližně 9%. I kdybychom počet harmonických zvyšovali až k nekonečnu, bude se pouze zmenšovat šířka překmitu v čase, ale jeho amplituda se bude čím dál více blížit uvedeným přibližně 9%.