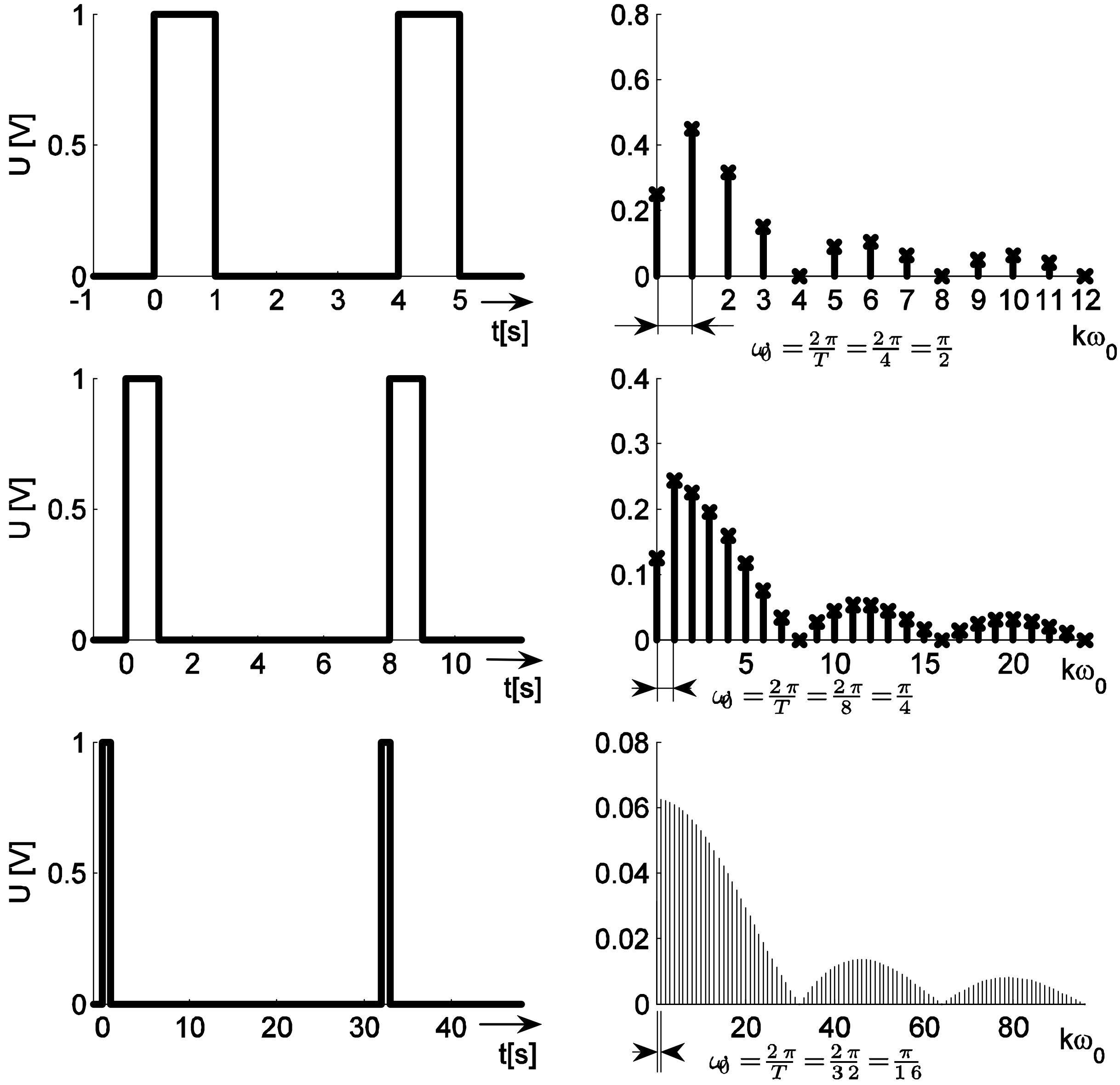
FOURIEROVA A LAPLACEOVA TRANSFORMACE, OPERÁTOROVÉ CHARAKTERISTIKY DVOJPÓLŮ

Fourierovy řady – prodlužování periody



Prodloužení periody při zachování šířky impulsu

- snižování základní frekvence $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- frekvence, které jsou u kratší periody zůstávají, jsou doplněny novými, podle obalové křivky $\frac{\sin x}{x} \approx \frac{\sin k\omega_0 t_0}{k\omega_0 t_0}$ (např. $4\omega_0 = 8\omega_0 = 32\omega_0$ pro T = 4 s, T = 8 s, resp. T = 32 s)

Prodloužení periody k ¥

- $T \to \infty \quad \Rightarrow \quad w_0 = \dfrac{2p}{T} \to 0\,,\ \Delta w_0 = w_0 \to 0$ původně diskrétní frekvence se stává spojitou
- Amplituda frekvenčního spektra (původně jednotlivých harmonických) se blíží 0

Uvažujeme Fourierovu řadu v komplexním tvaru

$$\mathbf{A}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-jkw_0 t}\,dt \qquad \text{(koeficienty)}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_k e^{jkw_0 t} \qquad \text{(řada)}$$

Koeficienty (harmonické) musíme **vynásobit periodou** ***T*** (jinak $\to$ 0 !)

$$T\mathbf{A}_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,e^{-jkw_0 t}\,dt \qquad \left(\frac{T}{2} \text{ bude } \infty!\right)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (T\mathbf{A}_k)\,e^{jkw_0 t}\,\frac{1}{T} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (T\mathbf{A}_k)\,e^{jkw_0 t}\,\frac{1}{\dfrac{2p}{w_0}} =$$

$$= \frac{1}{2p}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (T\mathbf{A}_k)\,e^{jkw_0 t}\,w_0 = \left|\Delta w = w_0\right| = \frac{1}{2p}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (T\mathbf{A}_k)\,e^{jkw_0 t}\,\Delta w$$

Pak **přímá Fourierova transformace**:

$$\mathbf{F}(jw) = \lim_{T\to\infty} T\mathbf{A}_k = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,e^{-jkw_0 t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-jwt}\,dt$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{f(t)\right\} = \mathbf{F}(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{jwt}\,dt}$$

Sčítání nekonečně mnoha nekonečně malých sčítanců přechází na integraci, diference na derivace, pak

zpětná Fourierova transformace

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2p} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (T\mathbf{A}_k) e^{jkw_0 t} \Delta w_0 = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(jw) e^{jwt}\, dw$$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(jw)\} = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(jw) e^{jwt}\, dw}$$

Podmínky existence

Funkce je absolutně integrovatelná $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty$

…splňuje podmínku $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$

splňuje Dirichletovy podmínky

Základní vlastnosti Fourierovy transformace

1. Superpozice

   $$f_1(t) + f_2(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{F}_1(jw) + \mathbf{F}_2(jw)] e^{jwt}\, dw$$

   spektrum součtu průběhů dvou signálů je rovno součtu spekter obou signálů

2. Posunutí v originále

   Je-li $\mathbf{F}(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jwt}\, dt$, pak

   $$\mathbf{F}(jw) e^{\pm jwt_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \pm t_0) e^{-jwt}\, dt$$

   posunutí v originále o t_0 znamená násobení obrazu e^{jwt_0}
   v elektrických obvodech je to zpoždění t_0, ke kterému dojde při průchodu impedancí s $e^{jwt_0} = e^{jj}$

3. Posunutí v obraze

   Je-li $\mathbf{F}(jw)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jwt}dt$, pak

   $$\mathbf{F}\left[j\left(w\,\mathbf{m}\,w_0\right)\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)e^{\pm jw_0 t}\right]e^{-jwt}dt$$

   pokud je w_0 nosná frekvence při frekvenční modulaci a funkce f(t) její obálka, pak bude frekvenční spektrum umístěno symetricky po obou stranách nosného kmitočtu

4. Derivace podle proměnné

   $$(jw)^n\,\mathbf{F}(jw)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^n f(t)}{dt^n}e^{-jwt}dt$$

   $$(-t)^n\,f(t)=\frac{1}{2p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^n\mathbf{F}(jw)}{d(jw)^n}e^{jwt}dw$$

   obraz n-té derivace originálu je násoben výrazem $(jw)^n$

5. Integrace podle proměnné

   $$\frac{1}{jw}\mathbf{F}(jw)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{t} f(t)dt\right]e^{-jwt}dt$$

   obraz integrálu předmětu je dělen výrazem jw

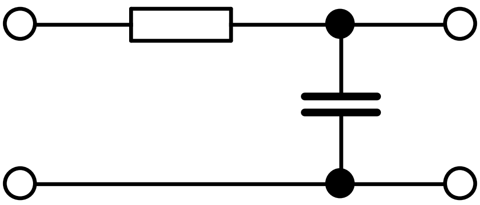
Použití v elektrických obvodech

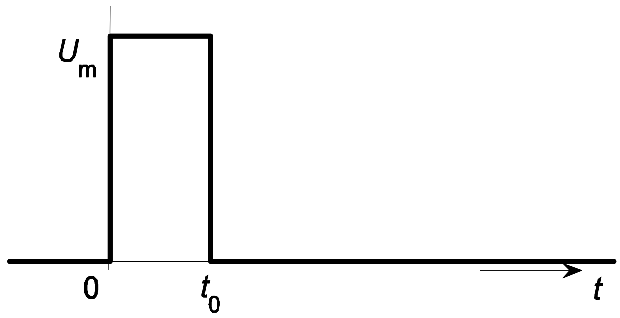
Na rozdíl od pracných Fourierových řad *(kde je nutno počítat s každou frekvenční složkou samostatně)* můžeme hledat průběh výstupního napětí při *neharmonickém buzení* obdobně, jako v HUS

1. $x_1(t)\rightarrow\mathbf{X}_1(jw)$
2. $\mathbf{X}_2(jw)=\mathbf{P}(jw)\mathbf{X}_1(jw)$
3. $\mathbf{X}_2(jw)\rightarrow x_2(t)$

Přenos je stejný, jako v HUS

Příklad:





$$1)\ \mathbf{U}_1(jw) = \int_0^{t_0} U_m e^{-jwt}\,dt = U_m\left[\frac{e^{-jwt}}{-jw}\right]_0^{t_0} = \frac{U_m}{-jw}\left[e^{-jwt} - 1\right]$$

$$2)\ \mathbf{P}(jw) = \frac{1}{1 + jwRC}$$

$$3)\ \mathbf{U}_2(jw) = \mathbf{U}_1(jw)\mathbf{P}(jw) = \frac{U_m}{-jw}\left[e^{-jwt} - 1\right]\frac{1}{1 + jwRC}$$

Zpětná transformace:

1) Obraz integrálu $\dfrac{1}{jw}$

$$\frac{1 - e^{-jwt}}{1 + jwRC} = F\left\{\int_0^{t_0} u_2(t)\,dt\right\}$$

2) Superpozice

$$\frac{1}{1 + jwRC} - \frac{e^{-jwt}}{1 + jwRC} = F\left\{\int_0^{t}\left[u_2'(t) + u_2''(t)\right]dt\right\}$$

3) Posunutí v originále e^{-jwt}

$$\frac{1}{1 + jwRC} = F\left\{\int_0^{t} u_2'(t)\,dt\right\} = F\left\{\int_0^{t}\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}\,dt\right\}$$

$$\frac{-e^{-jwt_0}}{1 + jwRC} = F\left\{-\int_{t_0}^{t} u_2''(t - t_0)\,dt\right\} = F\left\{\int_{t_0}^{t}\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}(t - t_0)}\,dt\right\}$$

$$4)\ u_2(t) = \left[1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right]1(t) - \left[1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right]1(t - t_0)$$

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Rozšíření množiny absolutně integrovatelných funkcí:

- vynásobení funkce $f(t)$ pomocnou funkcí e^{-st}
- nutná podmínka: $t \geq 0$

Jsou-li funkce po vynásobení absolutně integrovatelná, pak je funkce:

1) exponenciálního řádu
2) nazývá se **funkce standardního typu**

Pokud Fourierovu transformaci vynásobené funkce označíme $\mathbf{F}(s, jw)$, pak

$$\mathbf{F}(s, jw) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} e^{-jwt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+jw)t} dt$$

Zavedeme $s + jw = p$, pak **přímá Laplaceova transformace**

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt}$$

Zpětná Fourierova transformace obrazu $\mathbf{F}(p)$

$$f(t) e^{-st} = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(p) e^{jwt} dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(p) e^{jwt} e^{st} dw = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(p) e^{pt} dw$$

Po změně integrační proměnné bude **Zpětná Laplaceova transformace**

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \frac{1}{2p\, j} \int_{s-\infty}^{s+\infty} F(p) e^{pt} dp}$$

Pozn. symbol, používaný pro Laplaceovu transformaci se může lišit, psací „L“ mívá obvykle podobu $\mathcal{L}$, nebo též $\mathcal{L}$.

Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

1) Linearita

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{n} a_k F_k(p)$$

2) Posunutí v originále:

$$\mathcal{L}\left\{f(t-t_0)\right\} = e^{-pt_0} F(p)$$

3) Věta o obrazu derivace:

je-li $f(t)$ funkcí standardního typu, spojitá a hladká s výjimkou $t = 0$, pak

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = pF(p) - f(0_+)$$

$$f(0_+) = \lim_{t\to 0_+} f(t)$$

4) Věta o obrazu integrálu:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{p} F(p)$$

5) Obraz konvoluce:

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-t)\,g(t)\,dt\right\} = F(p)G(p)$$

6) Obrazy funkce v nule a v nekonečnu

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

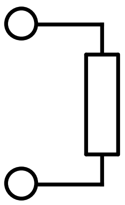
Operátorové charakteristiky dvojpólů

Kirchhofovy zákony platí i pro Laplaceovy obrazy:

$$\sum_{k=1}^{m} I_k(p) = 0$$

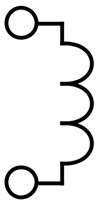
$$\sum_{k=1}^{n} U_k(p) = 0$$

Obrazy základních obvodových prvků v časové oblasti:



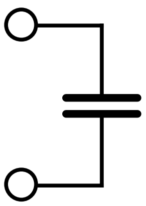
$$u_R(t) = R i_R(t) \quad \rightarrow \quad U_R(p) = R I_R(p)$$

$$i_R(t) = G i_R(t) \quad \rightarrow \quad I_R(p) = G U_R(p)$$



$$u_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad U_L(p) = pL I_L(p) - L i_L(0_+)$$

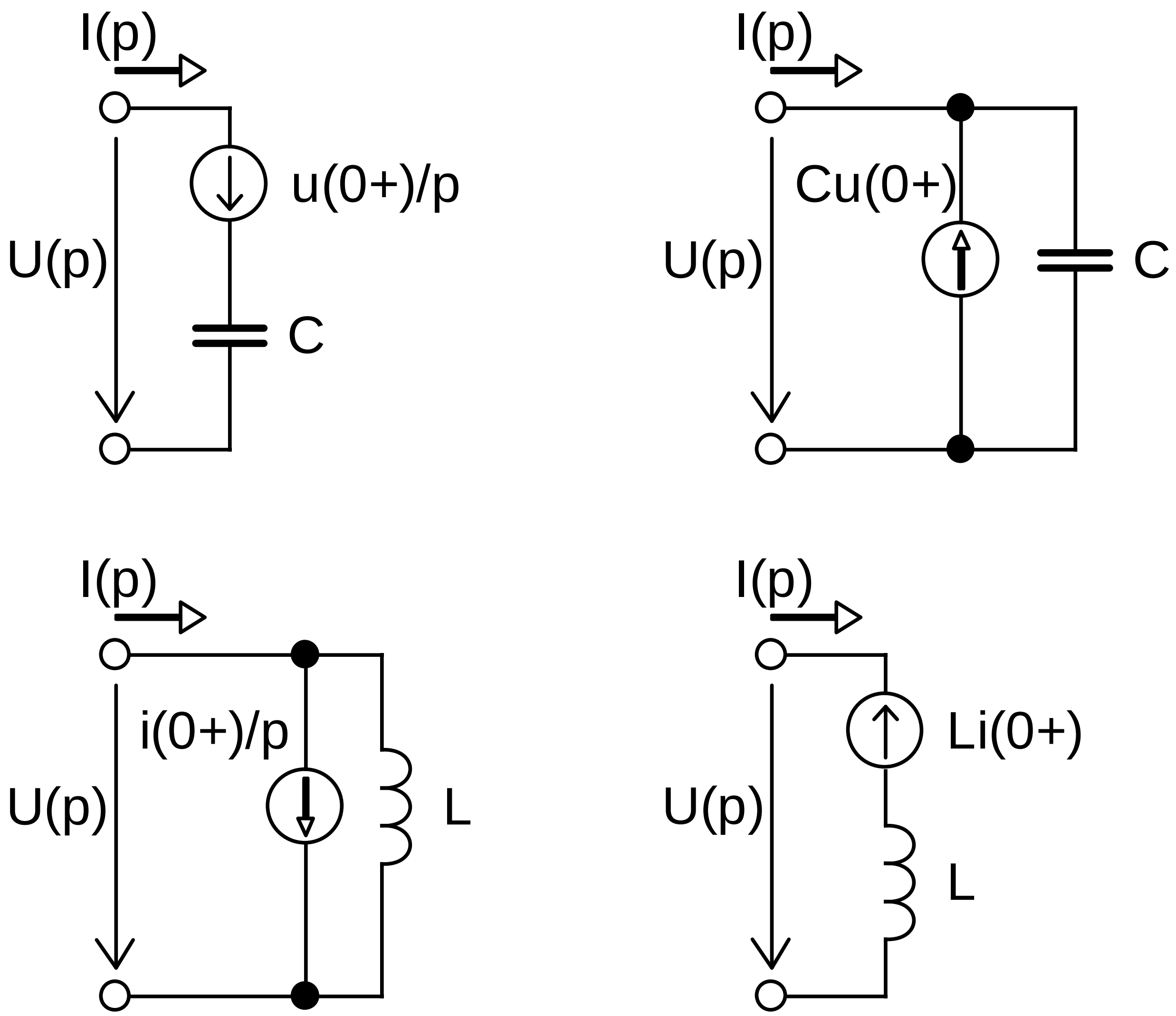
$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t)\,dt + i_L(0_+) \quad \rightarrow \quad I_L(p) = \frac{1}{pL} U_L(p) + \frac{i_L(0_+)}{p}$$



$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)\,dt + u_C(0_+) \quad \rightarrow \quad U_C(p) = \frac{1}{pC} I_C(p) + \frac{u_C(0_+)}{p}$$

$$i_C(t) = C \frac{d u_C(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad I_C(p) = pC U_C(p) - C u_C(0_+)$$

Náhradní obvody pro operátorové charakteristiky dvojpólů

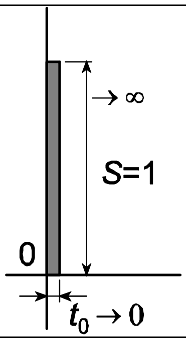
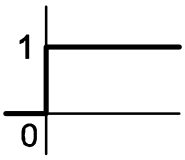
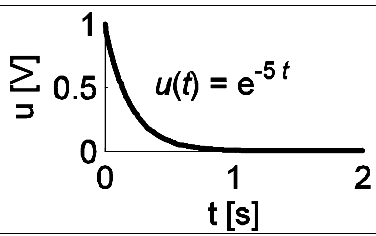
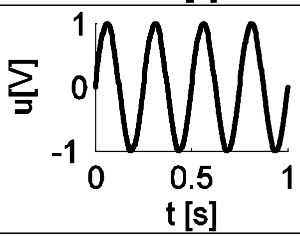
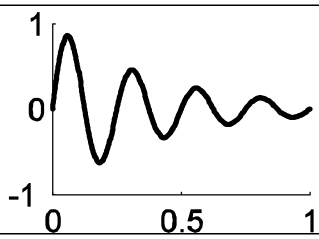


Operátorové imitance obecného dvojpólu **pro nulové počáteční podmínky**

$U(p) = Z(p) I(p)$ $\qquad$ $I(p) = Y(p) U(p)$

$$Z_R = R,\ Z_L = pL,\ Z_C = \frac{1}{pC},\ Y_R = G,\ Y_L = \frac{1}{pL},\ Y_C = pC$$

Základní slovník Laplaceovy transformace

	Časová oblast $f(t)$	Operátorová oblast $F(p)$
	Jednotkový (Diracův) impulz $d(t)$	1
	Jednotkový skok (stejnosměrné napětí, připojené v čase t = 0) $1(t)$	$\frac{1}{p}$
	Exponenciální impulz $e^{-at}\cdot 1(t)$	$\frac{1}{p+a}$
	$\sin wt \cdot 1(t)$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
	$\cos wt \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p^2+w^2}$
	exponenciálně tlumený sin $U_m e^{-at}\sin wt \cdot 1(t)$	$\frac{w}{(p+a)^2+w^2}$
	exponenciálně tlumený cos $U_m e^{-at}\cos wt \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2+w^2}$
	$t\cdot 1(t)$	$\frac{1}{p^2}$
	$\frac{t^n}{n!}\cdot 1(t)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$

Další základní průběhy dostaneme superpozicí (kombinací) obrazů uvedených v základním slovníku, např.:

$U_m \sin\left(wt + j\right)\cdot 1(t) =$ $= \left(A\cos wt + B\sin wt\right)\cdot 1(t)$ $U_m = \sqrt{A^2 + B^2}$ $j = arctg\,\frac{A}{B}$	$\dfrac{Ap + Bw}{p^2 + w^2}$
$U_m \sin\left(wt + j\right)\cdot 1(t) =$ $= \left(A\cos wt + \frac{B}{w}\sin wt\right)\cdot 1(t)$ $U_m = \sqrt{A^2 + \left(\frac{B}{w}\right)^2}$ $j = arctg\,\frac{Aw}{B}$	$\dfrac{Ap + B}{p^2 + w^2}$

Rozklad na parciální zlomky

Uvažujme funkci $F(p)$, kterou můžeme vyjádřit jako podíl dvou polynomů

$$F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}$$

Je-li funkce $Q(p)$ polynomem *n*-tého řádu, pak polynom $P(p)$ musí být alespoň *n*-1 řádu. Pokud je vyššího řádu, pak funkci upravíme do tvaru

$$F(p)=R(p)+F'(p)=R(p)+\frac{P'_{n-1}(p)}{Q(p)}$$

Funkci $F'(p)$ pak můžeme nahradit částečnými (parciálními) zlomky:

§ pokud má funkce $F(p)$ pouze jednoduché reálné kořeny

$$F'(p)=\frac{P'_{n-1}(p)}{K\prod_{i=1}^{n}(p-p_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{p-p_i}$$

§ pokud má funkce $F(p)$ kořeny s násobností α, β, γ, …

$$F'(p)=\frac{P'_{n-1}(p)}{K(p-p_a)^a\cdot(p-p_b)^b\cdot(p-p_c)^g\cdot\mathbf{L}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\frac{A_i}{(p-p_a)^i}+\sum_{j=1}^{b}\frac{B_j}{(p-p_b)^j}+\sum_{k=1}^{g}\frac{C_k}{(p-p_c)^k}+\mathbf{L}$$

§ pokud má funkce $F(p)$ dvojice komplexně sdružených kořenů

$$p_i=a_i\pm jb_i,\ (p-p'_i)(p-p''_i)=p^2-2a_ip+a_i^2+b_i^2=p^2+a_ip+b_i$$

(s násobností α, β, …)

$$F'(p)=\frac{P'_{n-1}(p)}{K\left(p^2+a_ap+b_a\right)^a\cdot\left(p^2+a_bp+b_b\right)^b\cdot\mathbf{L}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\frac{A_ip+B_i}{\left(p^2+a_ap+b_a\right)^i}+\sum_{j=1}^{b}\frac{C_jp+D_j}{\left(p^2+a_bp+b_b\right)^j}+\mathbf{L}$$

§ kombinace jednoduchých a dvojic komplexně sdružených kořenů

$$F'(p)=\frac{P'_{n-1}(p)}{K\prod_{i=1}^{n}(p-p_i)^{a_i}\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(p^2+a_j p+b_j\right)^{b_j}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{a_i}\frac{A_{ir}}{(p-p_i)^r}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{a_j}\frac{B_{jr}p+C_{jr}}{\left(p^2+a_j p+b_j\right)^r}$$

1) Metoda neurčitých koeficientů (porovnání koeficientů u stejných mocnin)
Funkci $F'(p)$ (dolní řádek, po rozkladu na parciální zlomky) vynásobíme
$\prod_{i=1}^{n}(p-p_i)^{a_i}\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(p^2+a_j p+b_j\right)^{b_j}$ (původním jmenovatelem, horní řádek)
a porovnáme koeficienty u stejných mocnin p ve funkci $\frac{P'_{n-1}(p)}{K}$.

2) Zakrývací pravidlo
není univerzální, u násobných kořenů lze použít pouze pro nejvyšší mocninu, ostatní koeficienty je nutné dopočítat
Ve funkci $F'(p)$ substituujeme za proměnnou p hodnotu kořene p_i.
Závorku, obsahující kořen p_i.musíme vyloučit (je nulová). Matematicky:

$$\lim_{p\to p_i}F'(p)(p-p_i)^{a_i}=\lim_{p\to p_i}\frac{P'_{n-1}(p)}{K\prod_{i=1}^{n}(p-p_i)^{a_i}\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(p^2+a_j p+b_j\right)^{b_j}}(p-p_i)^{a_i}$$

Příklad:

Metoda neurčitých koeficientů

$$F(p)=\frac{p^2-1990p+751000}{2p^2-4000p+1500000}=\frac{p^2-2000p+750000+(10p+1000)}{2\left(p^2-2000p+750000\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{5p+500}{p^2-2000p+750000}=\frac{1}{2}+\frac{5p+500}{(p-500)(p-1500)}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{A}{p-500}+\frac{B}{p-1500}$$

$$\frac{5p+500}{(p-500)(p-1500)} = \frac{A}{p-500} + \frac{B}{p-1500} \qquad \Big|\cdot (p-500)(p-1500)$$

$$5p+500 = A(p-1500) + B(p-500) = (A+B)p - 1500A - 500B$$

$$A+B = 5$$

$$-1500A - 500B = 500$$

$$B = 5 - A$$

$$-1500A - 2500 + 500A = 500$$

$$A = -3$$

$$B = 8$$

Zakrývací pravidlo

$$\frac{5p+500}{(p-500)(p-1500)} = \frac{A}{p-500} + \frac{B}{p-1500}$$

$$A = \left.\frac{5p+500}{\cancel{(p-500)}(p-1500)}\right|_{p=500} = \frac{5\cdot 500+500}{500-1500} = \frac{3000}{-1000} = -3$$

$$B = \left.\frac{5p+500}{(p-500)\cancel{(p-1500)}}\right|_{p=1500} = \frac{5\cdot 1500+500}{1500-500} = \frac{8000}{1000} = 8$$