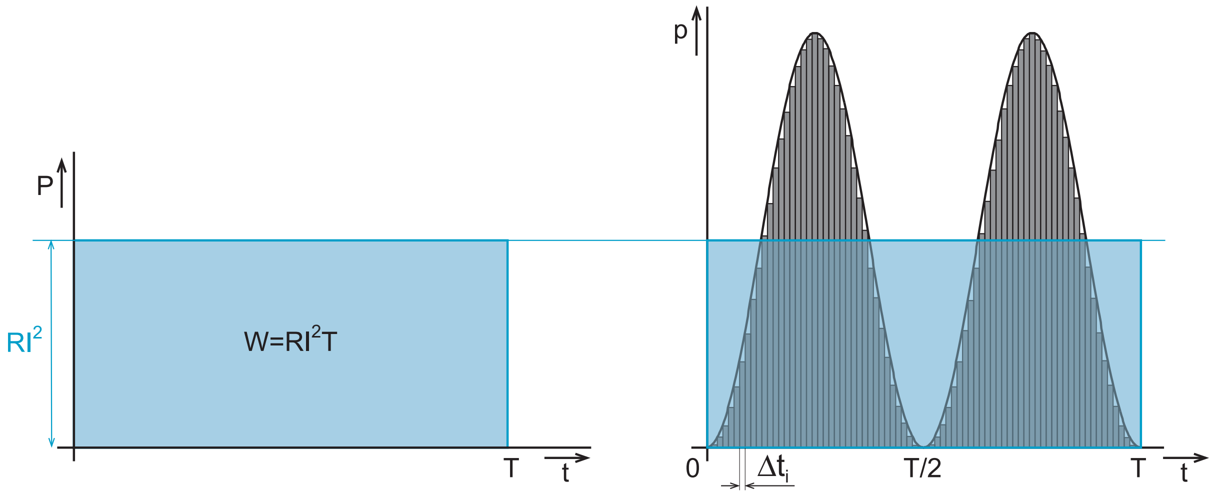
ANALÝZA PNUS, EFEKTIVNÍ HODNOTA, ČINITEL ZKRESLENÍ, VÝKON HARMONICKÉHO PROUDU

Efektivní hodnota proudu (obecná definice) $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\,dt}$

V anglické literatuře značeno I_{RMS} - Root Mean Square

Hodnota stejnosměrného proudu I, který by vyvinul stejné teplo, jako proud proměnný



$$W = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m} p_i \Delta t_i$$

Periodický proud – Fourierova řada $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk}\sin(k\omega_0 t + \psi_k)$

Efektivní hodnota

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk}\sin(k\omega_0 t + \psi_k)\right]^2 dt}$$

i fázově posunutý sin patří k ortogonálním funkcím, neboť

$$\int_0^T B_{m1}\sin(k\omega_0 t + \psi_k) B_{m2}\sin(l\omega_0 t + \phi_l)\,dt =$$

$$= B_{m1}B_{m2}\int_0^T \frac{1}{2}\left\{\cos\left[(k-l)\omega_0 t + \psi_k - \phi_l\right] - \cos\left[(k+l)\omega_0 t + \psi_k + \phi_l\right]\right\} dt =$$

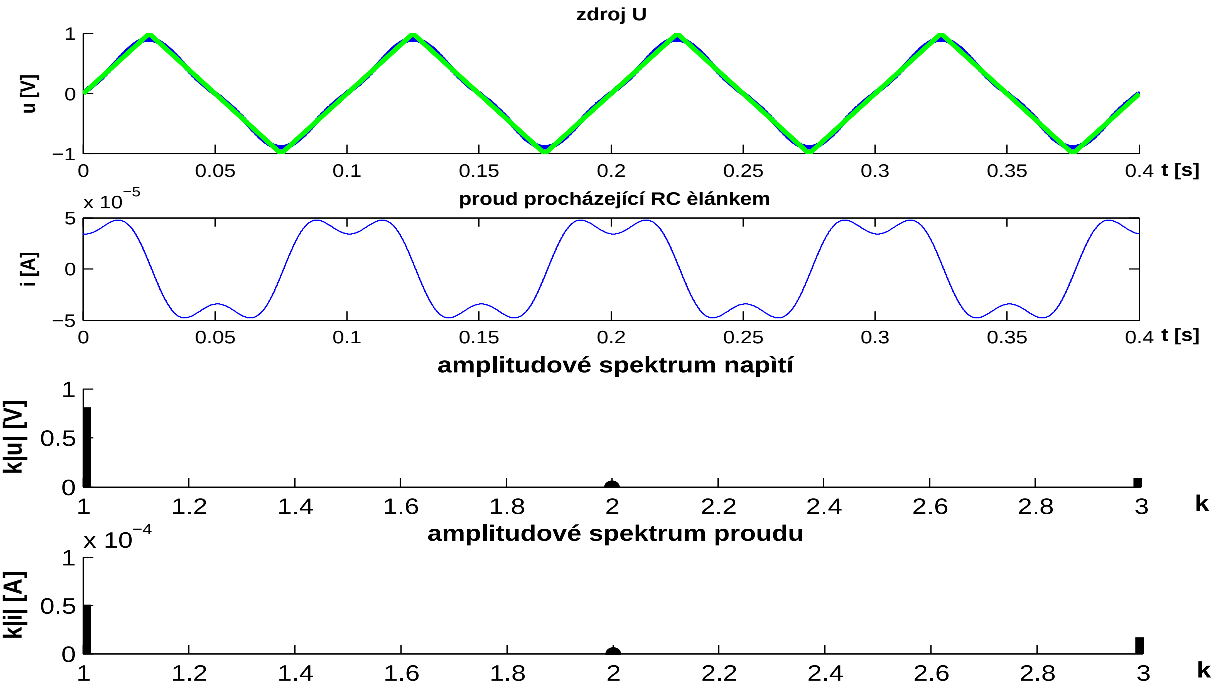
$$= \left|k \neq l\right| = 0$$

$$= \left|k = l\right| = T\frac{B_{m1}B_{m2}}{2}\cos(\psi_k - \phi_k) = T\frac{B_{m1}B_{m2}}{2}\cos\varphi_k$$

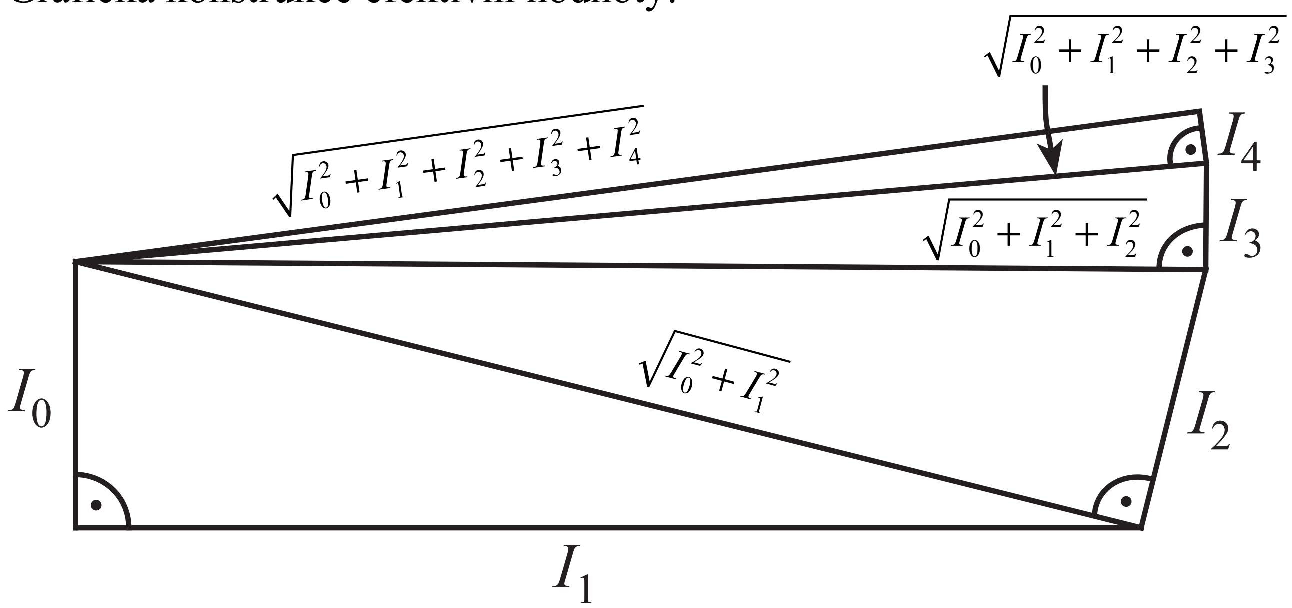
K efektivní hodnotě tedy přispívají pouze harmonické se stejným kmitočtem, k-té a l-té harmonické ($k \neq l$) se vzájemně neovlivňují.
Pak efektivní hodnota v PNUS

$$\boxed{I = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} I_{mk}^2} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots}}$$

Při praktickém výpočtu je možné uvažovat pouze omezený počet členů řady
Chyba závisí na průběhu časové funkce:



Grafická konstrukce efektivní hodnoty:



Charakteristika odlišnosti od harmonického průběhu – obsahu (obvykle nežádoucího) vyšších harmonických – **činitel zkreslení**:

$$d = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \cdots}}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \cdots}} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \cdots}}{I}$$

Čitatel – efektivní hodnota **zbytkové křivky**

Další definice:

$$d_s = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \cdots}}{I_1}$$

Činitel zkreslení *k*-tou harmonickou:

$$d_k = \frac{I_k}{I_1}$$

Jednotky – obvykle v %.

Příklad:

Činitel zkreslení obdélníkového průběhu $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4U_m}{k\pi} \sin k\omega t$

$$U = U_m,\ U_1 = \frac{4U_m}{\pi\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U} = \sqrt{1 - \left(\frac{U_1}{U}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2}} = 0.4352$$

$$d_s = d\frac{U}{U_1} = 0.4352\frac{U_m}{\frac{4U_m}{\pi\sqrt{2}}} = 0.4352\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 0.4834$$

Výkon periodického neharmonického napětí a proudu

Okamžitý výkon

$$p(t) = u(t)i(t)$$

Činný výkon

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,dt$$

Jsou-li proud a napětí ve vyjádřeny Fourierovými řadami

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega_0 t + \psi_k) \qquad i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega_0 t + \eta_k),$$

pak (ortogonalita!)

$$\boxed{P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{mk} I_{mk}}{2} \cos(\psi_k - \eta_k) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k \quad [W]}$$

Činný výkon, vyjádřený z komplexních koeficientů Fourierovy řady

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}_{Fk} e^{jk\omega_0 t}, \qquad i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{I}_{Fk} e^{jk\omega_0 t}$$

Koeficienty obou Fourierových řad

$$\mathbf{U}_{Fk} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad \mathbf{I}_{Fk} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

V obecné definici vyjádříme napětí Fourierovou řadou

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{T}\int_0^T i(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}_{Fk} e^{jk\omega_0 t} dt$$

Záměnou pořadí sumace a integrace, a dosazením koeficientů Fourierovy řady proudu

$$P = \sum_{k=\infty}^{+\infty} \mathbf{U}_{Fk} \frac{1}{T}\int_0^T i(t) e^{jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=\infty}^{+\infty} \mathbf{U}_{Fk} \mathbf{I}_{F(-k)}$$

Protože $\mathbf{I}_{F(-k)} = \mathbf{I}^*_{Fk}$, bude

$$\boxed{P = \sum_{k=\infty}^{+\infty} \mathbf{U}_{Fk} \mathbf{I}^*_{Fk}}$$

Jedná se o jednu z podob **Parsevalova teorému.** Výkon můžeme spočítat buď integrací v čase, nebo součtem součinů (kvadrátů) koeficientů Fourierovy řady. Bude rovněž např.

$$\frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\mathbf{U}_k|^2, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\mathbf{I}_k|^2$$

Příklad:

Máme funkci $u(t)=10\cos\left(100\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

Protože

$$u(t)=10\cos\left(100\pi+\frac{\pi}{4}\right)=5e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j100\pi}+5^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j100\pi}$$

Budou koeficienty Fourierovy řady:

$$\mathbf{U}_1=5e^{j\frac{\pi}{4}},\qquad \mathbf{U}_{-1}=5e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Bude

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left|10\cos\left(100\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right|^2 dt=5^2+5^2=50$$

Jalový výkon

$$\boxed{Q=\sum_{k=1}^{\infty}U_k I_k\sin\varphi_k\quad[\mathrm{var}]}$$

Zdánlivý výkon

$$\boxed{S=UI=\sqrt{\left(U_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2\right)\left(I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2\right)}\quad[VA]}$$

Zde se ale neuplatní ortogonalita, násobí se každý člen s každým, na rozdíl od P a Q, a proto

$$S^2\neq P^2+Q^2$$

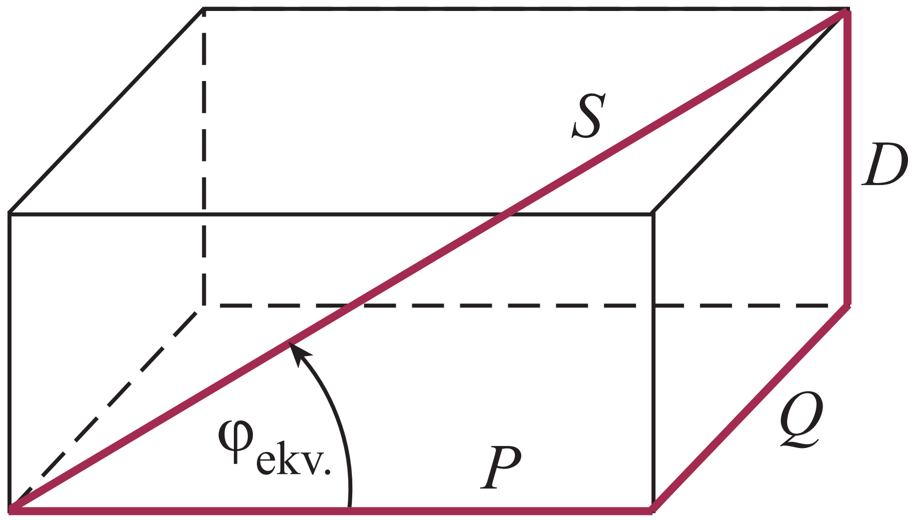
Zavádíme **deformační výkon**

$$D=\sqrt{S^2-P^2-Q^2}\quad[VA]$$

Účiník

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos\varphi_{ekv.}$$

$\varphi_{ekv.}$ je pouze fiktivní fázový posun mezi fiktivním harmonickým napětím a proudem se stejnými efektivními hodnotami a činným výkonem



Příklad:

$$u(t) = 2\sin 100\pi$$

$$i(t) = 0.5 + 1\sin\left(100\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 0.5\sin\left(300\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 0.1\sin\left(500\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$P = \frac{1}{2} 2 \cdot 1 \cdot \cos\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) = 0.7071\,W$$

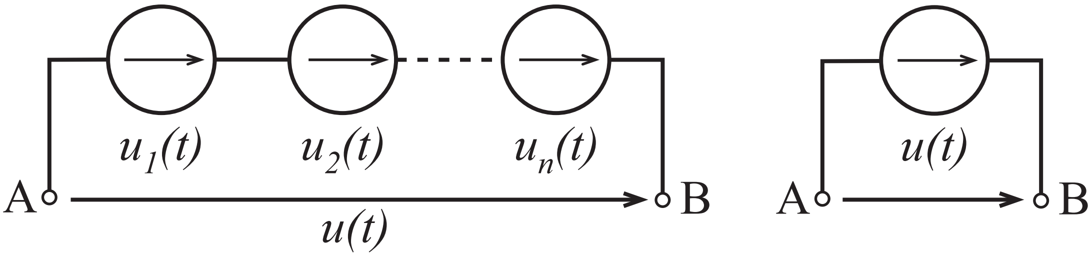
$$Q = 2 \cdot 1 \cdot \sin\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) = -0.7071\ \mathrm{var}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2^2}\sqrt{0.5^2 + \frac{1}{2}\left(1^2 + 0.5^2 + 0.1^2\right)} = 1.4142 \cdot 0.9381 = 1.3266\,VA$$

$$D = \sqrt{1.3266^2 - 0.7071^2 - 0.7071^2} = 0.8717\,VA$$

PNUS v lineárních obvodech

Analýza lineárních obvodů vychází z platnosti principu superpozice:



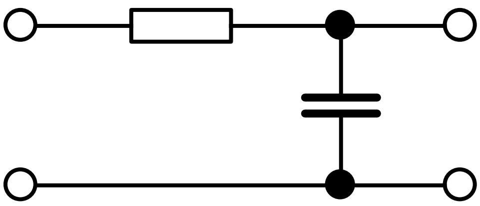
Analýzu můžeme proto provádět jako superpozici harmonických ustálených stavů, tj. složku po složce.

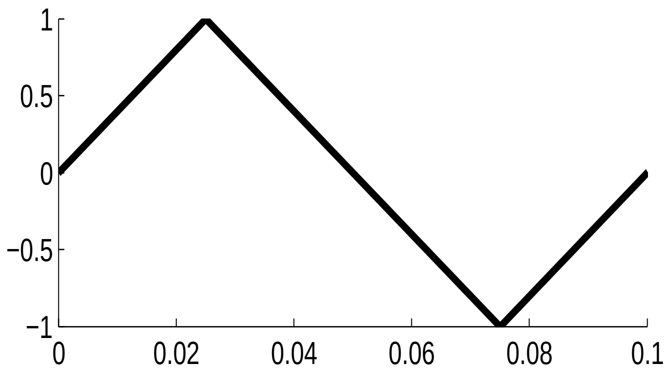
Postup:

1. Harmonická analýza (tj. nalezení koeficientů Fourierovy řady budící veličiny)
2. Výpočet složek – s využitím postupů analýzy v harmonickém ustáleném stavu nalezneme hledané řešení
3. Harmonická syntéza – vypočtené složky sečteme dohromady

Příklad:

RC článek je napájen ze zdroje trojúhelníkového napětí dle obrázku:





$R = 1000\ \Omega$, $C = 10^{-6}\ \mu\text{F}$

Fourierova řada –

stejnosměrná složka nulová,

funkce je lichá $\Rightarrow$ obsahuje pouze sinové členy

funkce je antiperiodická $\Rightarrow$ obsahuje pouze liché členy

Integrujeme pouze přes první čtvrtinu periody:

$$b_k = \frac{2}{\frac{T}{4}} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4U_m}{T} t \sin k\omega_0 t \, dt = \frac{32U_m}{T^2} \int_0^{\frac{T}{4}} t \sin k\omega_0 t \, dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t & v' = \sin k\omega_0 t \\ u' = 1 & v = \dfrac{-1}{k\omega_0} \cos k\omega_0 t \end{vmatrix} = \frac{32U_m}{T^2} \left\{ \left[\frac{-t}{k\omega_0} \cos k\omega_0 t \right]_0^{\frac{T}{4}} - \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{-1}{k\omega_0} \cos k\omega_0 t \, dt \right\} =$$

$$= \frac{8U_m}{k^2\pi^2} \left(-1\right)^{\frac{k+1}{2}+1}$$

Pro proud bude platit:

$$\hat{\mathbf{I}}_k = \frac{\hat{\mathbf{U}}_k}{\hat{\mathbf{Z}}_k} = \frac{\dfrac{8U_m}{k^2\pi^2}\left(-1\right)^{\frac{k+1}{2}+1}}{R + \dfrac{1}{jk\omega_0 C}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 20\pi$$

1. harmonická

$$\hat{\mathbf{I}}_1 = \frac{\dfrac{8}{\pi^2}}{1000 + \dfrac{1}{j \cdot 20\pi \cdot 10^{-6}}} = 3.187 \cdot 10^{-6} + j5.07 \cdot 10^{-5} = 5.08 \cdot 10^{-5} e^{j1.5}$$

3. harmonická

$$\hat{\mathbf{I}}_3 = \frac{\dfrac{8}{9\pi^2}}{1000 + \dfrac{1}{j \cdot 3 \cdot 20\pi \cdot 10^{-6}}} = 3.09 \cdot 10^{-6} + j1.64 \cdot 10^{-5} = 1.67 \cdot 10^{-5} e^{j1.384}$$

5. harmonická

$$\hat{\mathbf{I}}_5 = \frac{\dfrac{8}{25\pi^2}}{1000 + \dfrac{1}{j \cdot 5 \cdot 20\pi \cdot 10^{-6}}} = 2.91 \cdot 10^{-6} + j9.27 \cdot 10^{-6} = 9.72 \cdot 10^{-6} e^{j1.27}$$